



TITLE:

最近のEdward G. Effrosの仕事について (作用素環研究会報告集)

AUTHOR(S):

竹崎, 正道

CITATION:

竹崎, 正道. 最近のEdward G. Effrosの仕事について (作用素環研究会報告集). 数理解析研究所講究録 1966, 9: 1-7

ISSUE DATE:

1966-03

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/107388>

RIGHT:

最近の Edward G. Effros の仕事について

東北大学 竹 崎 正 道

最近, 講演者宛に E. G. Effros より送られて来た論文の pre-print の中で, 従来の作用素環論には見られなかつた斬新な idea が提示されており, 我々としてもその研究は十分注目する必要があると思われるので, ここで紹介することにする。論文は次の三つであるが, 何れも 10 月末現在未発表である。

I. "Convergence of Closed Subset in a Topological Space."

II. "The Borel Space of von Neumann Algebras on a Separable Hilbert Space."

III. "Global Structure in von Neumann Algebras."

註. I は Proc. Amer. Math. Soc., 16-5 (1965), 929~931 に発表された。

I. II. III は何れも一つの基本線の上に乘つた研究である。

即ち, 大ざっぱに言えば, 可附番無限次元 Hilbert space H 上の von Neumann algebras 全体の集合を \mathcal{A} とし, そこに適当な仕方で Borel structure を導入する。この Borel structure は Borel space (X, Γ) 上の von Neumann algebras の Borel field $\{\mathcal{A}(x)\}$ という従来の概念が実は X 上の \mathcal{A} -valued function として Borel function であるということと同値になる様な Borel structure になるのである。その点で, 従来の Borel sections の族により定義されていた von Neumann algebras の Borel field の概念が透明になる様に思われる。その Borel structure を \mathcal{A} に導入するための準備として, 一般の separable complete metric space (= polonais space) X の nonempty closed subsets の全体 $C_0(X)$ が standard Borel space になることを I で証明する。II で \mathcal{A} が standard Borel space になる事を示し, 更に \mathcal{A} の中で特に factors の全体 \mathcal{F} が standard Borel space であることを証明する。そこで J. von Neumann 以来の大問題「代数的に同型でない separable な factors はどれだ

け存在するか」に次の形で、挑戦する。即ち、 \mathcal{F} から同型関係 " \cong " で商空間

$\mathcal{F}/\cong = \tilde{\mathcal{F}}$ を作つたら Borel space として $\tilde{\mathcal{F}}$ は如何なるものであろうか。若し、 $\tilde{\mathcal{F}}$ が not standard Borel space になるならば、 \mathcal{F} 上の factors の代数型は連続濃度だけ存在する事になり、I 型の部分は可附番だから、II 型、III 型の部分が連続濃度で存在することになるという形で、問題は解決するのである。III はこの問題への接近を企つたもので、そのために \mathcal{F} の構造を更に詳しく調べている。

§ 1. Convergence of Closed Subsets in a Topological Space.

位相空間 X の閉集合の全体を $C(X)$ 、空でないものの全体を $C_0(X)$ とおく。今 $C(X)$ に於て

$$\lim F_\alpha = \{x \in X; \forall \text{ nbd. } V(x) \text{ of } x, \exists \alpha_0 : \\ V(x) \cap F_\alpha \neq \phi \quad \text{for } \forall \alpha \geq \alpha_0\}$$

$$\overline{\lim F_\alpha} = \{x \in X; \forall \text{ nbd. } V(x) \text{ of } x, \forall \alpha, \exists \alpha_0 \geq \alpha \\ V(x) \cap F_{\alpha_0} \neq \phi\}$$

と direct sequence $\{F_\alpha\}$ の \lim , $\overline{\lim}$ を定義し、 $\overline{\lim F_\alpha} = \lim F_\alpha$ のときこれを $\lim F_\alpha$ と記す。 $\Sigma \subset C(X)$ に対し、 $\overline{\Sigma}$ を Σ の凡ての limit の全体とし $\overline{\Sigma} = \Sigma$ のとき Σ を convergence closed という。

$C(X)$ に conv. closed sets の族より生成される位相を定義し、その relative topology として $C_0(X)$ を位相空間にし、これを convergence topology という。更に、この位相から生成される Borel structure を $C_0(X)$ に考えて convergence Borel structure と呼ぶと

定 理 X が polonais space ならば、 $C_0(X)$ の convergence Borel structure は standard である。そして、この Borel structure は $C_0(X)$ 上の functions

$$F \in C_0(X) \rightarrow d(x, F) = \inf \{d(x, y) : y \in F\}$$

の族が凡て Borel function になる様な最も弱い Borel structure である。

§ 2. The Borel Space of von Neumann Algebras on a Separable Hilbert Space.

1°) Separable Banach Spaces.

前節の結果により, X を separable Banach space とすれば $C_0(X)$ は standard Borel space になる。 X の closed subspaces 全体を $\mathcal{M}(X)$ とおくと $\mathcal{M}(X)$ は $C_0(X)$ で conv. closed になる。従つて $\mathcal{M}(X)$ は standard Borel space である。今 X の dual X^* の w^* -closed subspaces 全体を $\mathcal{M}(X^*)$ とおくと対応

$$Y \in \mathcal{M}(X) \rightarrow Y^\perp = \{ f \in X^* ; f(x) = 0 \quad x \in Y \} \in \mathcal{M}(X^*)$$

により $\mathcal{M}(X)$ と $\mathcal{M}(X^*)$ とは 1 対 1 に対応する。それで, この対応により $\mathcal{M}(X)$ の standard Borel structure を $\mathcal{M}(X^*)$ に変換して, $\mathcal{M}(X^*)$ を standard Borel space にする。

定 理 1. $\mathcal{M}(X^*)$ の Borel structure は次の function

$$Y \in \mathcal{M}(X^*) \rightarrow \|x|Y\| \quad x \in X$$

が Borel function になるような最弱 Borel structure である。

定 理 2. $\mathcal{M}(X^*)$ には次の様な countable Borel choice functions $f_n ; \mathcal{M}(X^*) \rightarrow X^*$ が存在する。即ち, $\{f_n(Y) : n=1, 2, \dots\}$ は Y の closed unit ball Y_1 で w^* -dense である。

系. (S, \mathcal{M}) が Borel space ならば, S 上の $\mathcal{M}(X^*)$ -valued function $s \in S \rightarrow Y(s) \in \mathcal{M}(X^*)$ が Borel function であるための必要十分条件は, S 上の X^* -valued Borel functions $f_n(s) \quad n=1, 2, \dots$ が存在して $\{f_n(s) : n=1, 2, \dots\}$ が $Y(s)_1$ で w^* -dense になることである。

この結果により通常の (S, \mathcal{M}) 上の Borel field という概念との関係がついて, 両者が一致することが分る。

2°) Von Neumann Algebras.

separable Hilbert space H 上の bounded operator 全体の

algebra を $B(\mathcal{H})$, von Neumann algebras 全体を \mathcal{A} , factors 全体を \mathcal{F} とおく。 B 上の σ -weakly continuous linear functionals 全体の作る Banach space を B_* とすると B_* は separable Banach space で $B = (B_*)^*$ となることは良く知られている。そこで, $\mathcal{M}(B)$ を B の σ -weakly closed subspaces の全体の作る Borel space とすると, 前節の議論からこれは standard Borel space である。今 $\mathcal{M}(B)$ に次の operations を考える;

$$Y \in \mathcal{M}(B) \rightarrow Y^* = \{A^*; A \in Y\} \in \mathcal{M}(B)$$

$$Y \in \mathcal{M}(B) \rightarrow Y' = \{A \in B(\mathcal{H}) ; AB=BA \text{ for } \forall B \in Y\}$$

定理 3. $Y \in \mathcal{M}(B) \rightarrow Y^* \in \mathcal{M}(B)$, $Y \in \mathcal{M}(B) \rightarrow Y' \in \mathcal{M}(B)$ は共に $\mathcal{M}(B)$ の Borel transformations である。

従つて,

系 1. \mathcal{A} は $\mathcal{M}(B)$ の Borel subset である。即ち, \mathcal{A} は standard Borel space になる。

系 2. 次の写像は共に Borel である。

$$(\alpha, \beta) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \alpha \wedge \beta \in \mathcal{A}$$

$$(\alpha, \beta) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \alpha \vee \beta \in \mathcal{A}$$

但し, $\alpha \vee \beta$ は α, β により生成される von Neumann algebra とする。

系 3. \mathcal{F} は \mathcal{A} の Borel subset で relative Borel structure に関して standard である。

§ 3. Global Structure in von Neumann Algebras.

記号を次の様に約束する。

\mathcal{H}_n ; fixed n -dimensional Hilbert space $1 \leq n \leq \aleph_0$

\mathcal{A}_n ; Borel space of all von Neumann algebras on \mathcal{H}_n .

$\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$; disjoint union

$\mathcal{F} = \{\alpha \in \mathcal{A} ; \text{ factor} \}$

$\widehat{\mathcal{F}}$: space of all spatial isomorphic classes in \mathcal{F} .
 $\widetilde{\mathcal{F}}$: space of all algebraic isomorphic classes in \mathcal{F} .
 $[\sigma]$: spatial isomorphic class of σ , $\sigma \in \mathcal{A}$,
 $[[\sigma]]$: algebraic isomorphic class of σ ,
 $\mathcal{A}_\alpha = \{ \sigma \in \mathcal{A} ; \text{ of type } \alpha \}$.
 $\alpha = \text{I, II, III, finite, infinite.}$
 $\mathcal{F}_\alpha = \mathcal{A}_\alpha \cap \mathcal{F}$. $\mathcal{F}_n = \mathcal{A}_n \cap \mathcal{F}$.
 G_n : group of all unitary operators on \mathcal{H}_n .

我々が今日最も関心のある問題「separable Hilbert space 上に代数型の異なる factors はどれだけ存在するか」の reduction をここで進める訳である。

定理 1. $\varphi_n : G_n \times \mathcal{A}_n \ni (V, \sigma) \rightarrow U\sigma U^{-1} \in \mathcal{A}_n$ は Borel map である。

定理 2. 各 $\sigma \in \mathcal{A}$ に対し $[\sigma]$ 及び $[[\sigma]]$ は共に \mathcal{A} の Borel set である。

系 1. $\widehat{\mathcal{A}}$, 及び $\widetilde{\mathcal{A}}$ の各点は Borel set である。

系 2. \mathcal{A}_I は Borel set である。

定理 3. $\mathcal{F}_\text{fin.}$ は \mathcal{F} の Borel set である。

定理 4. $\widehat{\mathcal{F}}$ が countably separated であることと $\widetilde{\mathcal{F}}$ がそうであることは同値である。

従つて $\widetilde{\mathcal{F}}$ が not countably separated なことを示すためには $\widehat{\mathcal{F}}$ についてそれを証明すればよいわけである。ところで問題の本質的な部分は \mathcal{F}_∞ にあるわけだから、結局、standard Borel space \mathcal{F}_∞ 上の polonais transformation group G_∞ の作用の下でその orbit space $\widehat{\mathcal{F}}$ が本質的部分になる訳である。即ち、 $\mathcal{F}_\infty / G_\infty$ を調べるのが今後の課題である。

次に、与えられた von Neumann algebra の central decomposition を通じて、上の問題に接近するルートを検討して見る。

σ を separable Hilbert space 上の von Neumann algebra とすれば、standard measure space (Z, \mathcal{I}^n, μ) とその上の \mathcal{F} -valued Borel function $\mathcal{F}(\zeta)$ により

$$\mathcal{O} \cong \int_Z^{\oplus} \mathcal{F}(\zeta) \, d\mu(\zeta)$$

と分解する。今

$$\text{map. } \zeta \in Z \rightarrow \mathcal{F}(\zeta) \in \hat{\mathcal{F}} \longrightarrow [\mathcal{F}(\zeta)] \in \hat{\mathcal{F}}$$

により $\hat{\mathcal{F}}$ 上に induce される measure が countably separated のとき \mathcal{O} は centrally smooth であるという。従つて, centrally smooth でない von Neumann algebra の存在を示しても問題は解ける。

centrally smooth な von Neumann algebra の分解については更に詳しい分解が得られて,

定理 5. centrally smooth von Neumann algebra を \mathcal{O} とすると, $\hat{\mathcal{F}}$ の Borel set W とその上の \mathcal{F} -valued Borel function $B(\xi)$ と, W 上の standard Borel measure ν_m 及び abelian von Neumann algebra ρ_m が $\pi_1^0 B(\xi) = \xi \quad \xi \in W$ となるように存在し,

$$\mathcal{O} \cong \sum_{m=0}^{\infty} \int^{\oplus} B(\xi) \, d\nu_m(\xi) \otimes \rho_m$$

となる。ここで $\nu_m (m \geq 1)$ は disjoint で ρ_m は m 次元 abelian von Neumann algebra で $\rho_0 = L^{\infty}(0, 1)$ である。但し π_1 は $\hat{\mathcal{F}} \ni \mathcal{O} \rightarrow [\mathcal{O}] \in \hat{\mathcal{F}}$ の map を意味する。

今, \mathcal{O} の center を \mathcal{Z} , その projection 全体を \mathcal{Z}_p とする。 $E, F \in \mathcal{Z}_p$ に対し $E \cong F$ を $\mathcal{O}E$ と $\mathcal{O}F$ が spatial isomorphic なることにより定義して E, F は spatially equivalent であるという。このとき (\mathcal{Z}_p, \cong) は dimension lattice になる。

$E, F \in \mathcal{Z}_p$ が $0 \neq E_1 \leq E, 0 \neq F_1 \leq F, E_1 \cong F_1$ となる。 projections $E_1, F_1 \in \mathcal{Z}_p$ を有しないとき, globally disjoint という。 E と $1-E$ が globally disjoint のとき E は globally central であるといい, その全体を \mathcal{Z}_p^G と記す。これ等の記号の下で次の様な定義をする。

$$\mathcal{O}: \text{global factor} \iff \mathcal{Z}_p^G = \{0, 1\},$$

$$\mathcal{O} : \text{globally multiplicity free} \iff \mathcal{F}_p^G = \mathcal{F}_p.$$

$E \in \mathcal{F}$ に対し

$$G(E) = \inf \{ F \in \mathcal{F}_p^G : F \geq E \}$$

とおく。

$$\mathcal{O} : \text{global type I} \iff \exists E \in \mathcal{F}_p : G(E) = I.$$

$$\text{且 } \mathcal{O}E : \text{globally multiplicity free.}$$

$$\mathcal{O} : \text{globally finite} \iff E \cong I \Rightarrow E = I.$$

以下, 自然に globally semi-finite, global type II, global type III を定義する。

そして, centrally smooth global factor \mathcal{O} は $\mathcal{F} \otimes p_m(\mathcal{F}$ は factor) の形をしており, $m \geq 1$ ならば \mathcal{O} は global type I, $m = 0$ なら \mathcal{O} は global type III である。従つて, global type II の global factor は central smooth にはならない。即ち, この様な algebra の存在を示せば我々の問題は解決する!